Exámenes de Selectividad

Física. Madrid 2021, Ordinaria

mentoor.es

Pregunta 1. Opción A. Campo Gravitatorio

Una masa puntual de 50 g se encuentra situada en la posición (8, 0) m del plano xy. Calcule:

a) **El potencial gravitatorio y el campo gravitatorio en el punto (0, 6) m del plano debido a dicha masa.**

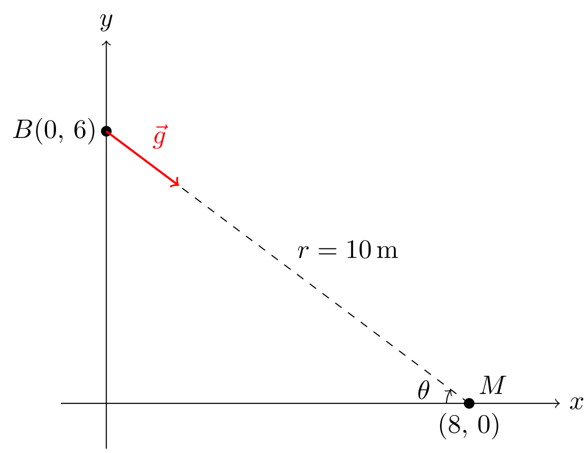
b) **El trabajo realizado por el campo al trasladar un objeto puntual de 20 g desde el punto (0, 6) m hasta el origen de coordenadas.**

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}.

Solución:

a) **El potencial gravitatorio y el campo gravitatorio en el punto (0, 6) m del plano debido a dicha masa.**

Comenzamos el ejercicio con una simple representación:



Primero, determinamos la distancia r entre la masa puntual y el punto donde queremos calcular el potencial y el campo gravitatorio. Usamos el Teorema de Pitágoras:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(8-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10\,\text{m}.$$

El Potencial gravitatorio V en el punto $(0, 6)$ m es:

$$V = -\frac{GM}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\text{kg}^{-2} \cdot 0{,}05\,\text{kg}}{10\,\text{m}} = -3{,}335 \cdot 10^{-12}\ \text{J kg}^{-1}.$$

El Campo gravitatorio $\vec{g}$ en el punto $(0, 6)$ m es:

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{0{,}05}{(10)^2}\vec{u}_r = -3{,}335 \cdot 10^{-13}\ \text{N kg}^{-1}\vec{u}_r,$$

donde $\vec{u}_r$ es el vector unitario en la dirección radial desde la masa hacia el punto $(0, 6)$ m. Calculamos el ángulo θ para determinar la dirección del campo:

$$\theta = \arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = \arctan\left(\frac{6-0}{0-8}\right) = \arctan\left(-\frac{6}{8}\right) \approx -36{,}87°.$$

Entonces, el campo gravitatorio apunta en la dirección de $\theta = -36{,}87°$ respecto al eje x negativo.

Por lo tanto, el potencial gravitatorio es $-3{,}335 \cdot 10^{-12}$ J kg^{-1} y el campo gravitatorio es $-3{,}335 \cdot 10^{-13}$ N kg$^{-1}\vec{u}_r$.

b) El trabajo realizado por el campo al trasladar un objeto puntual de 20 g desde el punto (0, 6) m hasta el origen de coordenadas.

El trabajo realizado por el campo gravitatorio es igual a la diferencia de energía potencial gravitatoria:

$$W = -\Delta E_p = -m\left(V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}}\right) = -m\left(V(O) - V(B)\right).$$

Calculamos el potencial en el origen $(0, 0)$ m:

$$V(O) = -\frac{GM}{r_O}, \quad \text{donde} \quad r_O = \sqrt{(8-0)^2 + (0-0)^2} = 8\,\text{m}.$$

Entonces:

$$V(O) = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}05}{8} = -4{,}169 \cdot 10^{-12}\,\text{J kg}^{-1}.$$

Ya teníamos que $V(B) = V(0, 6) = -3{,}335 \cdot 10^{-12}$ J kg^{-1}. Entonces, el trabajo es:

$$W = -0{,}02\,\text{kg}\left(-4{,}169 \cdot 10^{-12} - (-3{,}335 \cdot 10^{-12})\right) = -0{,}02 \cdot (-8{,}34 \cdot 10^{-13}) = 1{,}668 \cdot 10^{-14}\,\text{J}.$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por el campo al mover la masa de 20 g desde (0, 6) m hasta el origen es $1{,}668 \cdot 10^{-14}$ J. Este trabajo es positivo, lo que indica que el campo gravitatorio realiza trabajo al acercar la masa al origen.

Pregunta 2. Opción A. Ondas

Al explotar, un cohete de fuegos artificiales genera una onda sonora esférica con una potencia sonora de 20 mW. Un espectador oye la explosión 1,5 s después de verlo explotar. Calcule:

a) **La distancia a la que está situado el espectador respecto al cohete en el momento de la explosión, así como la intensidad del sonido en la posición del espectador.**
b) **El nivel de intensidad sonora percibida si explotan 10 cohetes simultáneamente, y el espectador los oye todos al unísono 1,5 s después de explotar.**

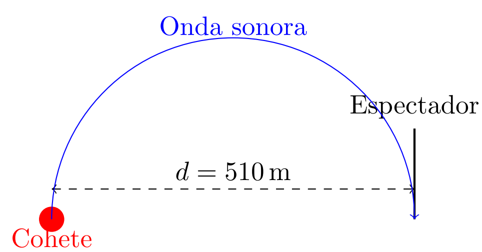
Datos: Velocidad del sonido en el aire, $v_s = 340\,\text{m s}^{-1}$; Valor umbral de la intensidad acústica, $I_0 = 10^{-12}\,\text{W m}^{-2}$.

Solución:

a) **La distancia a la que está situado el espectador respecto al cohete en el momento de la explosión, así como la intensidad del sonido en la posición del espectador.**

El espectador escucha la explosión 1,5 s después de verla, lo que significa que el sonido tardó 1,5 s en llegar hasta él. La distancia (d) se calcula usando la velocidad del sonido (v_s):

$$d = v_s \cdot t = 340\,\text{m/s} \cdot 1{,}5\,\text{s} = 510\,\text{m}.$$



La intensidad (I) de una onda sonora esférica se calcula mediante:

$$I = \frac{P}{S},$$

donde P es la potencia sonora y S es la superficie de la esfera de propagación. La superficie de una esfera es:

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi d^2 = 4\pi(510\,\text{m})^2 = 3{,}27 \cdot 10^6\,\text{m}^2.$$

La potencia sonora es $P = 20\,\text{mW} = 0{,}02\,\text{W}$. Entonces, la intensidad es:

$$I = \frac{0{,}02\,\text{W}}{3{,}27 \cdot 10^6\,\text{m}^2} = 6{,}11 \cdot 10^{-9}\,\text{W/m}^2.$$

Por lo tanto, el espectador está a una distancia de 510 m del cohete, y la intensidad del sonido en su posición es $6{,}11 \cdot 10^{-9}\,\text{W/m}^2$.

b) **El nivel de intensidad sonora percibida si explotan 10 cohetes simultáneamente, y el espectador los oye todos al unísono 1,5 s después de explotar.**

Si explotan 10 cohetes simultáneamente y se asume que las ondas sonoras son incoherentes y no interfieren destructivamente, la intensidad total (I_{total}) es la suma de las intensidades individuales:

$$I_{\text{total}} = 10 \cdot I = 10 \cdot 6{,}11 \cdot 10^{-9}\,\text{W/m}^2 = 6{,}11 \cdot 10^{-8}\,\text{W/m}^2.$$

El nivel de intensidad sonora en decibelios se calcula mediante:

$$\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{I_{\text{total}}}{I_0} \right),$$

donde $I_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$ es la intensidad umbral de audición. Sustituyendo:

$$\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{6{,}11 \cdot 10^{-8}}{1{,}0 \cdot 10^{-12}} \right) = 47{,}86\,\mathrm{dB}.$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora percibida al explotar 10 cohetes simultáneamente es 47,86 dB.

Pregunta 3. Opción A. Campo Electromagnético

Una carga puntual de 2 μC se encuentra situada en el origen de coordenadas.

a) **Aplicando el teorema de Gauss, obtenga el flujo del campo eléctrico a través de una superficie esférica de 10 mm de diámetro centrada en el origen.**

b) **Utilizando el valor del flujo obtenido en el apartado anterior, calcule el módulo del campo eléctrico en puntos situados a 5 mm de la carga.**

Dato: Permitividad eléctrica del vacío, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,N^{-1}m^{-2}}$.

Solución:

a) **Aplicando el teorema de Gauss, obtenga el flujo del campo eléctrico a través de una superficie esférica de 10 mm de diámetro centrada en el origen.**

Según el Teorema de Gauss, el flujo eléctrico Φ a través de una superficie cerrada es:

$$\Phi = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0},$$

donde Q_{enc} es la carga encerrada por la superficie y ε_0 es la permitividad eléctrica del vacío. Dado que la esfera de diámetro $10\,\mathrm{mm}$ (radio $r = 5\,\mathrm{mm} = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$) está centrada en el origen y contiene la carga puntual $Q = 2\,\mu\mathrm{C} = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$, el flujo es:

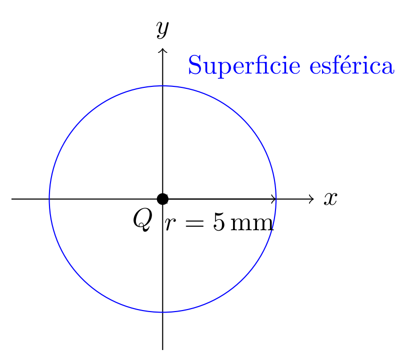
$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}}} = 2{,}26 \cdot 10^5\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-1}},$$

siendo positivo pues la carga interior es positiva y el campo es saliente.

Por lo tanto, el flujo eléctrico a través de la superficie esférica es $\boldsymbol{\Phi = 2{,}26 \cdot 10^5\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-1}}}$.

b) **Utilizando el valor del flujo obtenido en el apartado anterior, calcule el módulo del campo eléctrico en puntos situados a 5 mm de la carga.**

Observamos que los puntos situados a 5 mm de la carga se encuentran sobre la siguiente superficie (vista de perfil):



El flujo eléctrico también puede expresarse como:

$$\Phi = E \cdot S,$$

donde E es el módulo del campo eléctrico en la superficie y S es el área de la superficie esférica de radio $r = 5\,\mathrm{mm}$. Calculamos el área de la esfera:

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi(5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2 = 3{,}14 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2.$$

Despejamos E de la ecuación del flujo:

$$E = \frac{\Phi}{S} = \frac{2{,}26 \cdot 10^5\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-1}}}{3{,}14 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}} = 7{,}19 \cdot 10^8\,\mathrm{N\,C^{-1}}.$$

Por lo tanto, el módulo del campo eléctrico a 5 mm de la carga es $\boldsymbol{E = 7{,}19 \cdot 10^8\,\mathrm{N\,C^{-1}}}$.

Pregunta 4. Opción A. Óptica

Un objeto vertical de 2 mm de altura se encuentra situado 15 cm a la izquierda de una lente convergente de 40 dioptrías. Calcule:

a) **La posición y tamaño de la imagen que forma la lente.**
b) **La posición de una segunda lente convergente de 6 cm de distancia focal, situada a la derecha de la primera lente, para que el sistema óptico genere una imagen en el infinito.**

Solución:

a) **La posición y tamaño de la imagen que forma la lente.**

La potencia de una lente (P) está relacionada con su distancia focal (f') mediante:

$$P = \frac{1}{f'}.$$

Dado que $P = +40\,\text{dioptrías}$, tenemos:

$$f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{40\,\text{m}^{-1}} = 0{,}025\,\text{m} = 2{,}5\,\text{cm}.$$

Nótese que la distancia focal es positiva porque se trata de una lente convergente. Para calcular la posición de la imagen (s') usamos la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s},$$

donde s es la distancia del objeto a la lente ($s = -15\,\text{cm}$) y s' es la distancia de la imagen a la lente (a determinar). Sustituimos los valores:

$$\frac{1}{2{,}5} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{-15} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s'} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad s' = 3\,\text{cm}.$$

El aumento lateral viene dado por:

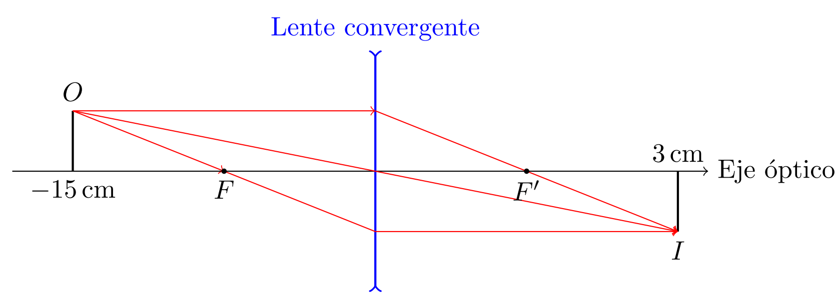
$$m = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{3}{-15} = -0,2.$$

El tamaño de la imagen es:

$$y' = m \cdot y = (-0{,}2) \cdot 0{,}2\,\text{cm} = -0{,}04\,\text{cm},$$

donde el signo negativo indica que la imagen está invertida respecto al objeto.

Diagrama de rayos:



Por lo tanto, la imagen se forma a 3 cm a la derecha de la lente y su tamaño es de 0,04 cm invertida.

b) La posición de una segunda lente convergente de 6 cm de distancia focal, situada a la derecha de la primera lente, para que el sistema óptico genere una imagen en el infinito.

Para que el sistema óptico genere una imagen en el infinito, el objeto para la segunda lente debe estar en su foco objeto, es decir,

$$s_2 = -f_2' = -6\,\mathrm{cm},$$

donde el signo negativo indica que el objeto está a la izquierda de la segunda lente. La imagen formada por la primera lente (I_1) actúa como objeto para la segunda lente (L_2). La posición de I_1 respecto a la primera lente es $s_1' = +3\,\mathrm{cm}$ (a la derecha de L_1). La distancia entre las lentes es:

$$d = s_1' - s_2 = 3\,\mathrm{cm} - (-6\,\mathrm{cm}) = 9\,\mathrm{cm}.$$

El signo negativo indica que la segunda lente debe colocarse 8,14 cm a la izquierda de la imagen I_1, es decir, 8,14 cm a la derecha de la primera lente.

Por lo tanto, la segunda lente debe situarse a 9 cm a la derecha de la primera lente para que el sistema forme una imagen en el infinito.

Pregunta 5. Opción A. Física Moderna

Un material posee un sistema de tres niveles energéticos electrónicos (nivel fundamental, primer nivel, y segundo nivel). Para que un electrón pase desde el nivel fundamental al segundo nivel, el material absorbe radiación de 450 nm; tras lo cual el material emite radiación de 600 nm debido al decaimiento del primer nivel hasta el fundamental.

a) **Determine las diferencias de energía entre el primer nivel y el nivel fundamental, y entre el segundo nivel y el nivel fundamental, expresadas en electrón-voltios.**

b) **Calcule la energía por unidad de tiempo que produce la emisión si el material emite $4 \cdot 10^{15}$ fotones s^{-1}.**

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; Constante de Planck, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J s; Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}.

Solución:

a) **Determine las diferencias de energía entre el primer nivel y el nivel fundamental, y entre el segundo nivel y el nivel fundamental, expresadas en electrón-voltios.**

Asignamos las siguientes denominaciones a los niveles energéticos:
- Nivel fundamental: E_0
- Primer nivel excitado: E_1
- Segundo nivel excitado: E_2

Para el salto desde el nivel fundamental al segundo nivel ($E_0 \to E_2$), el electrón absorbe fotones de longitud de onda $\lambda_{0\to2} = 450\,\text{nm}$. La energía asociada a este salto es:

$$E_2 - E_0 = h\nu_{0\to2} = h\frac{c}{\lambda_{0\to2}}.$$

De manera similar, para el salto desde el primer nivel al nivel fundamental ($E_1 \to E_0$), el electrón emite fotones de longitud de onda $\lambda_{1\to0} = 600\,\text{nm}$. La energía asociada a este salto es:

$$E_1 - E_0 = h\nu_{1\to0} = h\frac{c}{\lambda_{1\to0}}.$$

Calculamos las energías:
- Para $E_2 - E_0$:

$$\lambda_{0\to2} = 450\,\text{nm} = 450 \cdot 10^{-9}\,\text{m},$$

$$E_2 - E_0 = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\text{J s}) \cdot (3 \cdot 10^{8}\,\text{m/s})}{450 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} = \frac{1{,}989 \cdot 10^{-25}\,\text{J m}}{450 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} = 4{,}42 \cdot 10^{-19}\,\text{J}.$$

Convertimos a electrón-voltios:

$$E_2 - E_0 = \frac{4{,}42 \cdot 10^{-19}\,\text{J}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{J/eV}} = 2{,}76\,\text{eV}.$$

- Para $E_1 - E_0$:

$$\lambda_{1\to0} = 600\,\text{nm} = 600 \cdot 10^{-9}\,\text{m},$$

$$E_1 - E_0 = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\text{J s}) \cdot (3 \cdot 10^{8}\,\text{m/s})}{600 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} = \frac{1{,}989 \cdot 10^{-25}\,\text{J m}}{600 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} = 3{,}32 \cdot 10^{-19}\,\text{J}.$$

Convertimos a electrón-voltios:

$$E_1 - E_0 = \frac{3{,}32 \cdot 10^{-19}\,\text{J}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{J/eV}} = 2{,}07\,\text{eV}.$$

Por lo tanto, las diferencias de energía son:
- $\boldsymbol{E_1 - E_0 = 2{,}07\,\text{eV}}$**,**

– $\boldsymbol{E_2 - E_0 = 2{,}76\,\mathrm{eV}}$.

b) **Calcule la energía por unidad de tiempo que produce la emisión si el material emite $\boldsymbol{4 \cdot 10^{15}}$ fotones $\boldsymbol{s^{-1}}$.**

El material emite $n = 4 \cdot 10^{15}$ fotones por segundo de longitud de onda $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$ (transición de E_1 a E_0). La energía de cada fotón emitido es:

$$E_{\text{fotón}} = h\frac{c}{\lambda} = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\ s}) \cdot (3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})}{600 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 3{,}32 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}.$$

La energía total emitida por segundo (potencia P) es:

$$P = n \cdot E_{\text{fotón}} = (4 \cdot 10^{15}\,\text{fotones/s}) \cdot (3{,}32 \cdot 10^{-19}\,\text{J/fotón}) = 1{,}328 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W}.$$

Por lo tanto, la energía emitida por unidad de tiempo es $\boldsymbol{1{,}33 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W}}$.

Pregunta 1. Opción B. Campo Gravitatorio

Una sonda espacial de 3500 kg se encuentra en órbita circular alrededor de Saturno, realizando una revolución cada 36 horas. Calcule:

a) **La velocidad orbital y la energía mecánica que posee la sonda espacial.**
b) **La energía mínima necesaria que habría que suministrarle para que abandone el campo gravitatorio del planeta.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}; Masa de Saturno, $M_s = 5,68 \cdot 10^{26}$ kg.

Solución:

a) **La velocidad orbital y la energía mecánica que posee la sonda espacial.**

Para determinar la velocidad orbital y la energía mecánica, primero es necesario encontrar el radio de la órbita (R). Utilizaremos la relación entre la fuerza gravitatoria y la fuerza centrípeta que mantiene a la sonda en movimiento circular uniforme:

$$F_{\text{gravitatoria}} = F_{\text{centrípeta}} \quad \Rightarrow \quad \frac{GM_s m}{R^2} = \frac{mv^2}{R},$$

donde G es la constante de gravitación universal, M_s es la masa de Saturno, m es la masa de la sonda, v es la velocidad orbital de la sonda y R es el radio de la órbita. Simplificando la expresión:

$$\frac{GM_s}{R} = v^2.$$

Sabemos que la velocidad orbital también se relaciona con el periodo orbital (T):

$$v = \frac{2\pi R}{T}.$$

Sustituyendo v en la ecuación anterior:

$$\frac{GM_s}{R} = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2.$$

Simplificando y despejando R:

$$GM_s = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2} \quad \Rightarrow \quad R^3 = \frac{GM_s T^2}{4\pi^2}.$$

Entonces, el radio de la órbita es:

$$R = \left(\frac{GM_s T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}.$$

Convertimos el periodo T a segundos:

$$T = 36\,\text{horas} \cdot 3600\,\frac{\text{s}}{\text{hora}} = 129600\,\text{s}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$R = \left(\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2\,\text{kg}^{-2})(5{,}68 \cdot 10^{26}\,\text{kg})(129600\,\text{s})^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 2{,}53 \cdot 10^8\,\text{m}.$$

Calculamos ahora de la velocidad orbital v:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(2{,}53 \cdot 10^8\,\text{m})}{129600\,\text{s}} = 12246{,}6\,\text{m/s}.$$

La energía mecánica total es la suma de la energía cinética y la energía potencial gravitatoria:

$$E_{\text{mec}} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_s m}{R}.$$

Sin embargo, para una órbita circular, se puede simplificar a:

$$E_{\text{mec}} = -\frac{GM_s m}{2R}.$$

Sustituyendo los valores:

$$E_{\text{mec}} = -\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11})(5{,}68 \cdot 10^{26})(3500)}{2 \cdot 2{,}53 \cdot 10^{8}} = -2{,}62 \cdot 10^{11}\,\text{J}.$$

Por lo tanto, la velocidad orbital de la sonda es aproximadamente 12462,6 m/s y su energía mecánica es $-2{,}62 \cdot 10^{11}$ J.

b) **La energía mínima necesaria que habría que suministrarle para que abandone el campo gravitatorio del planeta.**

Para que la sonda escape del campo gravitatorio de Saturno, su energía mecánica total debe ser al menos cero en el infinito. Entonces, la energía adicional necesaria es igual al valor absoluto de la energía mecánica actual de la sonda:

$$\Delta E = E_\infty - E_{\text{mec}} = 0 - (-2{,}62 \cdot 10^{11}\,\text{J}) = 2{,}62 \cdot 10^{11}\,\text{J}.$$

Por lo tanto, se requiere suministrar una energía mínima de $2{,}62 \cdot 10^{11}$ J para que la sonda escape del campo gravitatorio de Saturno.

Pregunta 2. Opción B. Ondas

El valor del campo eléctrico asociado a una onda electromagnética que se propaga en un medio material en la dirección del eje x viene expresado por:

$$\boldsymbol{E(t,x) = 4\cos(3,43\cdot 10^{15}t - 1,52\cdot 10^{7}x)\,\mathrm{N\ C^{-1}},}$$

donde todas las magnitudes están expresadas en unidades del SI. Calcule:

a) **La frecuencia y la longitud de onda asociadas a la onda electromagnética.**
b) **La velocidad de propagación de la onda y el índice de refracción del medio por el cual se propaga.**

Dato: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3\cdot 10^8$ m s^{-1}.

Solución:

a) **La frecuencia y la longitud de onda asociadas a la onda electromagnética.**

La ecuación de la onda electromagnética se puede comparar con la forma general de una onda armónica:

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

donde A es la amplitud de la onda, ω es la frecuencia angular (rad/s), k es el número de onda (rad/m) y φ_0 es la fase inicial. Del enunciado, identificamos:

$$A = 4\,\mathrm{m}, \quad \omega = 3{,}43\cdot 10^{15}\,\mathrm{rad/s}, \quad k = 1{,}52\cdot 10^{7}\,\mathrm{m^{-1}}.$$

La frecuencia f está relacionada con la frecuencia angular ω mediante:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{3{,}43\cdot 10^{15}\,\mathrm{rad/s}}{2\pi} = 5{,}46\cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}.$$

La longitud de onda λ se relaciona con el número de onda k mediante:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{1{,}52\cdot 10^{7\ -1}} = 4{,}13\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 413\,\mathrm{nm}.$$

Por lo tanto, la frecuencia de la onda es $5{,}46\cdot 10^{14}$ Hz y su longitud de onda es 413 nm.

b) **La velocidad de propagación de la onda y el índice de refracción del medio por el cual se propaga.**

La velocidad de propagación de la onda se puede obtener multiplicando la frecuencia por la longitud de onda:

$$v = \lambda f = (4{,}13\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m})\cdot(5{,}46\cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}) = 2{,}26\cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}.$$

El índice de refracción del medio es la razón entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de propagación en el medio:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3\cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}}{2{,}26\cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}} = 1{,}33.$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación de la onda es $2{,}26\cdot 10^8$ m/s y el índice de refracción del medio es 1,33.

Pregunta 3. Opción B. Campo Electromagnético

Un hilo conductor rectilíneo indefinido situado a lo largo del eje x transporta una corriente de 25 A en sentido positivo del eje. Obtenga:

a) **El campo magnético creado en un punto situado en $(0, 5, 0)$ cm.**
b) **La fuerza magnética que experimenta un electrón cuando está en la posición $(0, 5, 0)$ cm y tiene una velocidad de 1000 m s^{-1} en sentido positivo del eje y.**

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T m A^{-1}.

Solución:

a) **El campo magnético creado en un punto situado en $(0, 0, 1)$ m.**

El campo magnético creado por un hilo conductor rectilíneo infinito en un punto situado a una distancia d del hilo se calcula mediante la fórmula:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d},$$

donde:
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T\,m\,A^{-1}}$ es la permeabilidad magnética del vacío,
- $I = 25\,\mathrm{A}$ es la corriente que circula por el hilo,
- $d = 5\,\mathrm{cm} = 5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$ es la distancia desde el hilo hasta el punto considerado.

Sustituyendo los valores:

$$B = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T\,m\,A^{-1}})(25\,\mathrm{A})}{2\pi(5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})} = 1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}.$$

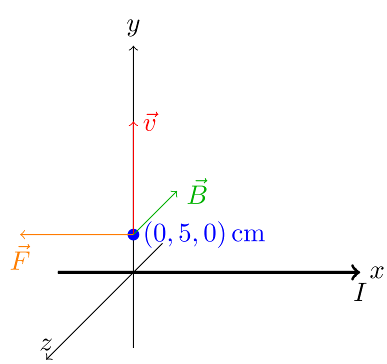
La dirección del campo magnético se determina mediante la regla de la mano derecha, y en este caso, apunta en la dirección positiva del eje z, es decir, $\vec{k}$. Entonces,

$$\vec{B} = 1 \cdot 10^{-4}\,\vec{k}\,\mathrm{T}.$$

Por lo tanto, el campo magnético es $\vec{B} = 1 \cdot 10^{-4}\,\vec{k}\,\mathrm{T}$.

b) **La fuerza magnética que experimenta un electrón cuando está en la posición $(0, 5, 0)$ cm y tiene una velocidad de 1000 m s^{-1} en sentido positivo del eje y.**

Representamos gráficamente las condiciones del enunciado:



La fuerza magnética que experimenta una carga en movimiento en un campo magnético se calcula con la Ley de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}),$$

donde:

- $q = -e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C (la carga del electrón es negativa),
- $\vec{v} = v\,\vec{j} = 1000\,\vec{j}$ m/s,
- $\vec{B} = 1 \cdot 10^{-4}\,\vec{k}$ T.

Entonces,

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = -1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 10^{-4} \end{vmatrix} = -1.6 \cdot 10^{-20}\,\vec{i}\,\mathrm{N}.$$

Por lo tanto, la fuerza magnética es $\boldsymbol{-1.6 \cdot 10^{-20}\,\vec{i}}$ N.

Pregunta 4. Opción B. Ondas

Un rayo láser, que emite luz de longitud de onda de 488 nm en el vacío, incide desde el aire sobre la superficie plana de un material con un índice de refracción de 1, 55. El rayo incidente y el reflejado forman entre sí un ángulo de 60°. Calcule:

a) **Determine la frecuencia y la longitud de onda del rayo luminoso en el aire y dentro del medio material.**

b) **Calcule el ángulo que formará el rayo refractado en el material con el rayo reflejado en el aire. ¿Existirá algún ángulo de incidencia para el cual el rayo láser sufra reflexión total? Justifique la respuesta.**

Datos: Índice de refracción del aire, $n_{\text{aire}} = 1$; Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}.

Solución:

a) **Determine la frecuencia y la longitud de onda del rayo luminoso en el aire y dentro del medio material.**

La frecuencia de la luz permanece constante al pasar de un medio a otro, por lo que es la misma en el aire y dentro del material. Recordemos que la frecuencia (f) se calcula mediante la relación:

$$f = \frac{c}{\lambda_0},$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8\,\text{m/s}$ y λ_0 es la longitud de onda en el vacío, $\lambda_0 = 488\,\text{nm} = 488 \cdot 10^{-9}\,\text{m}$. Calculamos:

$$f = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{488 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} = 6{,}15 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}.$$

La longitud de onda dentro del material (λ) se obtiene dividiendo la longitud de onda en el vacío por el índice de refracción del material:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{488 \cdot 10^{-9}\,\text{m}}{1{,}55} = 3{,}15 \cdot 10^{-7}\,\text{m} = 315\,\text{nm}.$$

Por lo tanto, la frecuencia de la luz es $6{,}15 \cdot 10^{14}$ Hz tanto en el aire como en el material y la longitud de onda es 488 nm en el aire y 315 nm dentro del material.

b) **Calcule el ángulo que formará el rayo refractado en el material con el rayo reflejado en el aire. ¿Existirá algún ángulo de incidencia para el cual el rayo láser sufra reflexión total? Justifique la respuesta.**

Comenzamos determinando el ángulo de incidencia (θ_1). Dado que el rayo incidente y el reflejado forman un ángulo de 60° y que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, se cumple:

$$\theta_1 + \theta_{\text{reflejado}} = 60^\circ, \quad \text{pero} \quad \theta_{\text{reflejado}} = \theta_1 \quad \Rightarrow \quad 2\theta_1 = 60^\circ.$$

Entonces,

$$\theta_1 = 30^\circ.$$

A continuación, calculamos el ángulo de refracción (θ_2) usando la Ley de Snell:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2,$$

donde:

- $n_1 = 1$ es el índice de refracción del aire,

– $n_2 = 1{,}55$ es el índice de refracción del material,
– $\theta_1 = 30°$ es el ángulo de incidencia.

Despejamos θ_2:

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 = \frac{1}{1{,}55}\sin 30° = \frac{1}{1{,}55}\cdot 0{,}5 = 0{,}3226 \quad\Rightarrow\quad \theta_2 = \arcsin(0{,}3226) \approx 18{,}82°.$$

Finalmente, calculamos el ángulo entre el rayo refractado y el rayo reflejado (α). La suma de los ángulos en el punto de incidencia es:

$$\theta_1 + \theta_{\text{reflejado}} + \alpha = 180°.$$

Como $\theta_{\text{reflejado}} = \theta_1$, entonces

$$\alpha = 180° - \theta_1 - \theta_{\text{refractado}} = 180° - 30° - 18{,}82° = 131{,}18°.$$

La reflexión total interna ocurre cuando la luz pasa de un medio con mayor índice de refracción a uno con menor índice, y el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico. En este caso, la luz pasa del aire ($n_1 = 1$) al material ($n_2 = 1{,}55$), es decir, de un medio menos refringente a uno más refringente. De esta forma, no es posible que ocurra reflexión total interna en este caso, ya que se requiere que $n_1 > n_2$.

Por lo tanto, el ángulo entre el rayo refractado y el rayo reflejado es 131,18°. No existe ningún ángulo de incidencia para el cual el rayo láser sufra reflexión total al pasar del aire al material, porque la reflexión total interna sólo ocurre cuando la luz pasa de un medio más refringente a uno menos refringente.

Pregunta 5. Opción B. Física Moderna

Un isótopo de una muestra radiactiva posee un periodo de semidesintegración de 5730 años. Calcule:

a) **Obtenga la vida media y la constante radiactiva del isótopo.**
b) **Si una muestra tiene $5 \cdot 10^{20}$ átomos radiactivos en el momento inicial, calcule la actividad inicial y el tiempo que debe trascurrir para que dicha actividad se reduzca a la décima parte.**

Solución:

a) **Obtenga la vida media y la constante radiactiva del isótopo.**

La constante radiactiva λ se relaciona con el periodo de semidesintegración $T_{1/2}$ mediante

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Sustituyendo el valor de $T_{1/2} = 5730\,\text{años}$:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{5730\,\text{años}} = \frac{0{,}6931}{5730\,\text{años}} = 1{,}2097 \cdot 10^{-4}\,\text{años}^{-1}.$$

La vida media τ está dada por:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1{,}2097 \cdot 10^{-4}\,\text{años}^{-1}} = 8267{,}1\,\text{años}.$$

Por lo tanto, la vida media del isótopo es aproximadamente 8267 años y la constante radiactiva es $1{,}2097 \cdot 10^{-4}$ años^{-1}.

b) **Si una muestra tiene $5 \cdot 10^{20}$ átomos radiactivos en el momento inicial, calcule la actividad inicial y el tiempo que debe trascurrir para que dicha actividad se reduzca a la décima parte.**

Comenzamos calculando la actividad inicial A_0. La actividad en un momento dado viene dada por:

$$A = \lambda N,$$

donde N es el número de átomos radiactivos presentes (en el momento inicial, $N = N_0 = 5 \cdot 10^{20}$ átomos). convertimos la constante radiactiva λ a unidades de s^{-1} para obtener la actividad en becquerelios (Bq). Sabemos que:

$$1\,\text{año} = 365{,}25\,\text{días} \cdot 24\,\text{horas/día} \cdot 3600\,\text{s/hora} = 31\,557\,600\,\text{s}.$$

Entonces,

$$\lambda = 1{,}2097 \cdot 10^{-4}\,\text{años}^{-1} = \frac{1{,}2097 \cdot 10^{-4}}{31\,557\,600\,\text{s/año}} = 3{,}835 \cdot 10^{-12}\,\text{s}^{-1}.$$

Ahora, calculamos la actividad inicial:

$$A_0 = \lambda N_0 = (3{,}835 \cdot 10^{-12}\,\text{s}^{-1}) \cdot (5 \cdot 10^{20}\,\text{átomos}) = 1{,}9175 \cdot 10^{9}\,\text{Bq}.$$

Seguidamente, hallamos el tiempo t para que la actividad se reduzca a una décima parte. La actividad en función del tiempo es:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}.$$

Queremos encontrar t tal que:

$$A(t) = \frac{A_0}{10} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_0}{10} = A_0 e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{10} = e^{-\lambda t}.$$

Tomamos logaritmo natural en ambos lados:

$$\ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\lambda t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 10}{\lambda}.$$

Calculamos t usando λ en años^{-1}:

$$t = \frac{\ln 10}{1{,}2097 \cdot 10^{-4}\,\text{años}^{-1}} \approx 19\,044\,\text{años}.$$

Por lo tanto, la actividad inicial es $1{,}9175 \cdot 10^9$ Bq y el tiempo necesario para que la actividad se reduzca a una décima parte es aproximadamente 19 044 años.